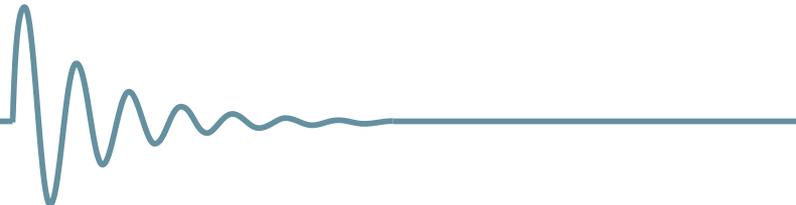


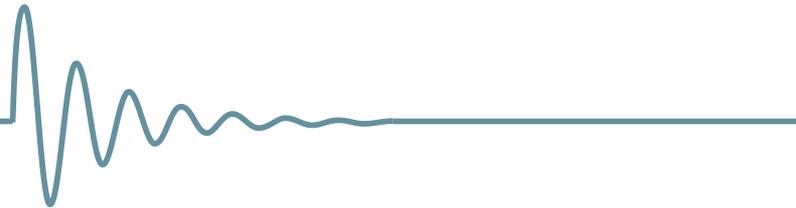
Tema 4

Aplicaciones de la Representación de Fourier



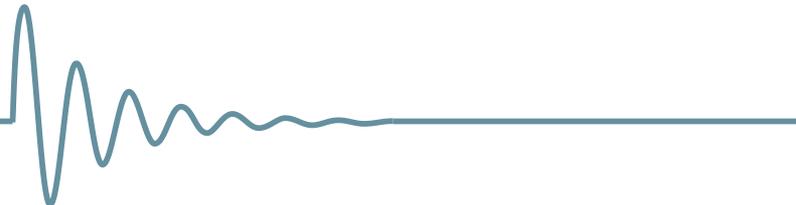
Índice

- Introducción
- Respuesta en frecuencia de los sistemas LTI
 - Filtrado
 - Sistemas descritos por ecuaciones diferenciales y en diferencias
- Muestreo de señales continuas
- Reconstrucción



Introducción

- Tema 3: Hemos desarrollado la representación de Fourier para cuatro clase de señales:
 - Series de Fourier de señales discretas en el tiempo (DTFS)
 - Series de Fourier de señales continuas en el tiempo (FS)
 - Transformada de Fourier de señales aperiódicas discretas en el tiempo (DTFT)
 - Transformada de Fourier de señales aperiódicas continuas en el tiempo (FT)
- También hemos visto como, incorporando impulsos de manera adecuada, podíamos desarrollar la transformada de Fourier para señales periódicas



Respuesta en frecuencia de sistemas LTI (I)

$$h(t) \xleftrightarrow{FT} H(j\omega)$$

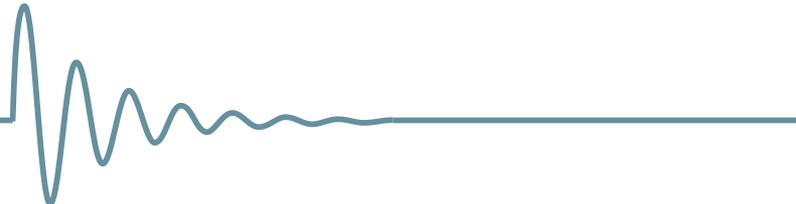
$$h[n] \xleftrightarrow{DTFT} H(e^{j\Omega})$$

- La propiedad de convolución relaciona la entrada y la salida de un sistema LTI de la siguiente forma:

$$y(t) = x(t) * h(t) \xleftrightarrow{FT} Y(j\omega) = X(j\omega) \cdot H(j\omega)$$

$$y[n] = x[n] * h[n] \xleftrightarrow{DTFT} Y(e^{j\Omega}) = X(e^{j\Omega}) \cdot H(e^{j\Omega})$$

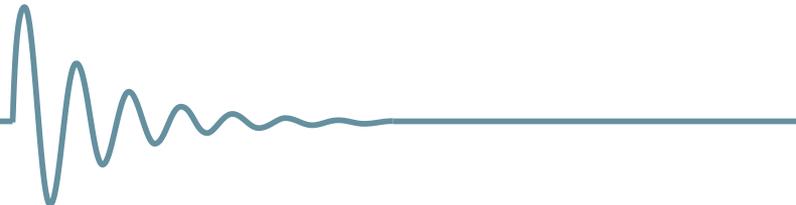
- Y la multiplicación en el dominio de la frecuencia nos lleva a la noción de filtrado: el sistema filtra la señal de entrada presentando diferentes respuestas a las componentes de la entrada a diferentes frecuencias



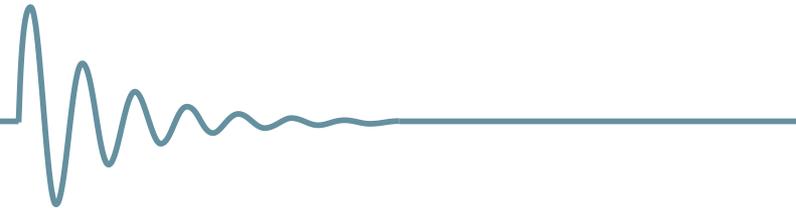
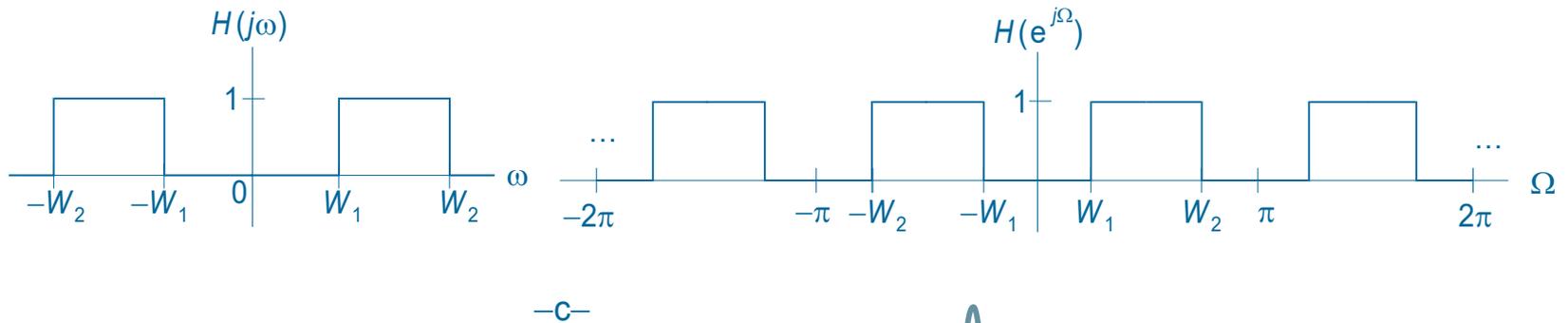
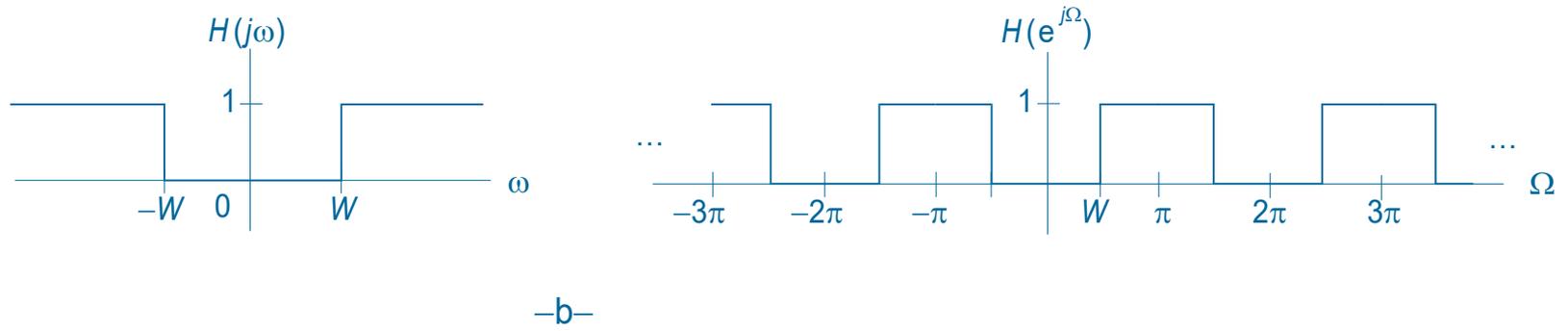
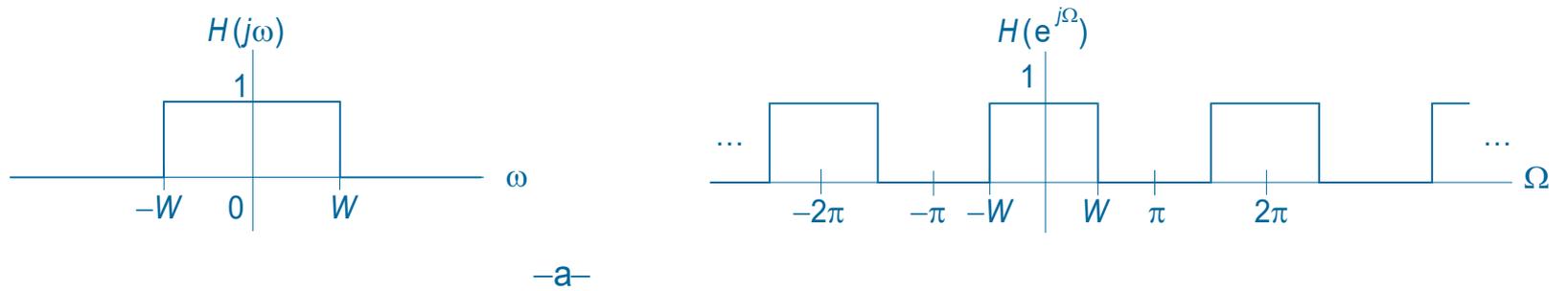
Respuesta en frecuencia de sistemas LTI (II)

- Filtros ideales

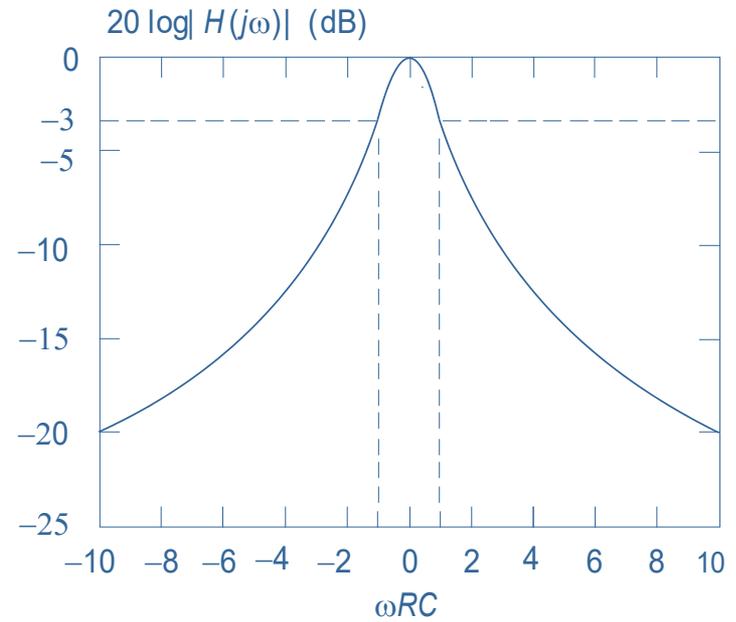
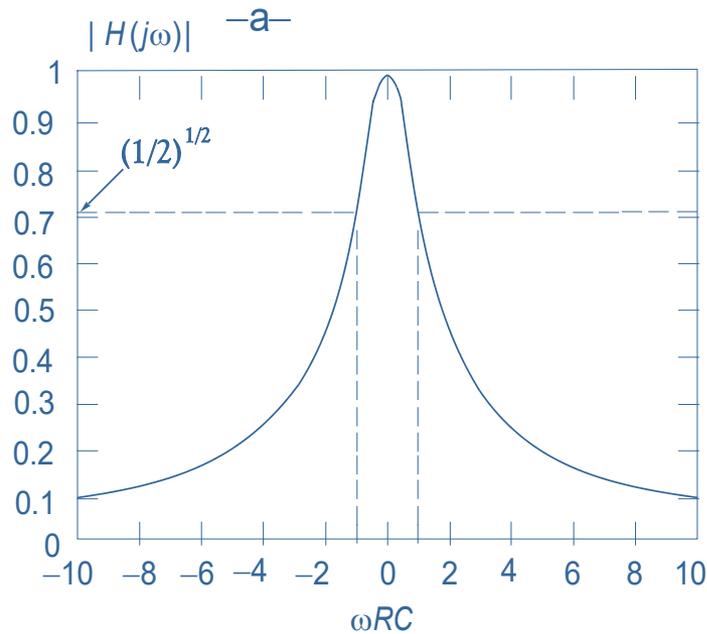
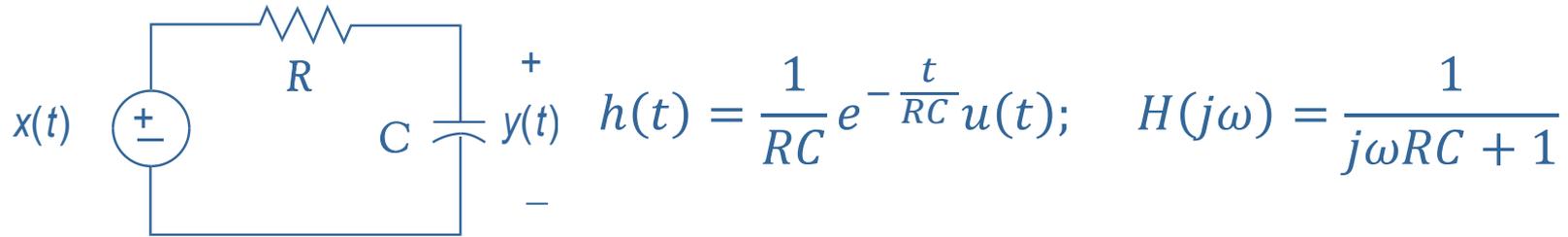
- **Filtro paso bajo:** atenúa las componentes de alta frecuencia de la entrada y deja pasar las componentes de baja frecuencia.
- **Filtro paso alto:** atenúa las componentes de baja frecuencia de la entrada y deja pasar las componentes de alta frecuencia.
- **Filtro paso banda:** deja pasar las componentes de la entrada contenidas en una banda de frecuencia y atenúa las componentes fuera de esa banda.



Respuesta en frecuencia de sistemas LTI (III)



Respuesta en frecuencia de sistemas LTI (IV)



-b-

-c-

$$20 \log |H(j\omega)| \quad \text{ó} \quad 20 \log |H(e^{j\Omega})| \quad |Y(j\omega)|^2 = |H(j\omega)|^2 |X(j\omega)|^2$$

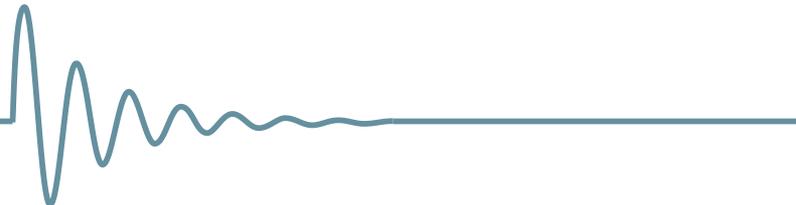


Respuesta en frecuencia de sistemas LTI (V)

- De la propiedad de convolución se observa que la respuesta en frecuencia puede expresarse mediante la relación de la FT o DTFT de la salida respecto de la entrada

$$Y(j\omega) = X(j\omega) \cdot H(j\omega) \Rightarrow H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$$

$$Y(e^{j\Omega}) = X(e^{j\Omega}) \cdot H(e^{j\Omega}) \Rightarrow H(e^{j\Omega}) = \frac{Y(e^{j\Omega})}{X(e^{j\Omega})}$$



Respuesta en frecuencia de sistemas LTI (VI)

- Ejemplo: La salida de un sistema LTI a la entrada $x(t) = e^{-2t}u(t)$ viene dada por la siguiente expresión, $y(t) = e^{-t}u(t)$. Encontrar la respuesta en frecuencia y la respuesta al impulso del sistema.

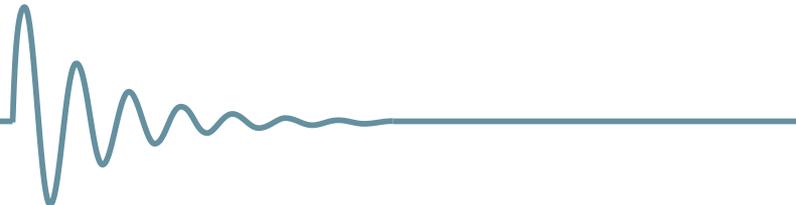
$$x(t) = e^{-2t}u(t) \xleftrightarrow{FT} X(j\omega) = \frac{1}{j\omega + 2}$$

$$y(t) = e^{-t}u(t) \xleftrightarrow{FT} Y(j\omega) = \frac{1}{j\omega + 1}$$

- Respuesta en frecuencia:

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{\frac{1}{j\omega + 1}}{\frac{1}{j\omega + 2}} = \frac{j\omega + 2}{j\omega + 1} = 1 + \frac{1}{j\omega + 1}$$

- Respuesta al impulso: $h(t) = \delta(t) + e^{-t}u(t)$



Ecuaciones diferenciales y en diferencia (I)

- Sistema descrito por ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes

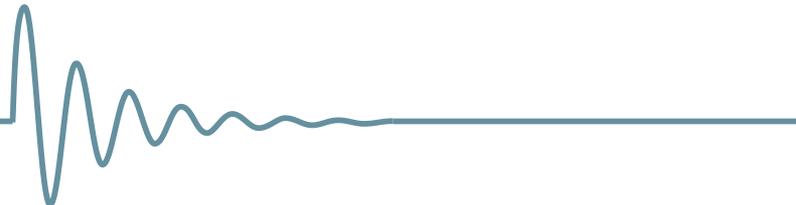
$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

Calculamos la FT aplicando las propiedades de linealidad y derivación:

$$\sum_{k=0}^N a_k (j\omega)^k Y(j\omega) = \sum_{k=0}^M b_k (j\omega)^k X(j\omega)$$

Se ve que la respuesta en frecuencia es una relación polinomial en $j\omega$

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^N a_k (j\omega)^k}$$



Ecuaciones diferenciales y en diferencia (II)

- Sistema descrito por ecuaciones en diferencia de coeficientes constantes

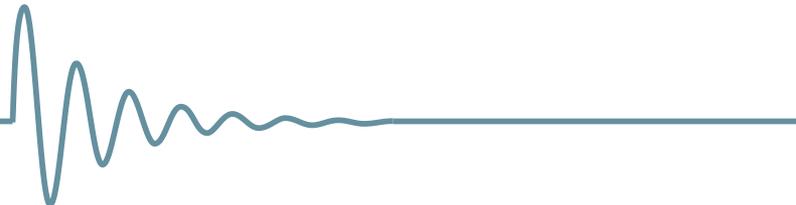
$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

Calculamos la DTFT aplicando las propiedades de linealidad y desplazamiento:

$$\sum_{k=0}^N a_k (e^{-j\Omega})^k Y(e^{j\Omega}) = \sum_{k=0}^M b_k (e^{-j\Omega})^k X(e^{j\Omega})$$

Se ve que la respuesta en frecuencia es una relación polinomial en $e^{-j\Omega}$

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{Y(e^{j\Omega})}{X(e^{j\Omega})} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k (e^{-j\Omega})^k}{\sum_{k=0}^N a_k (e^{-j\Omega})^k}$$



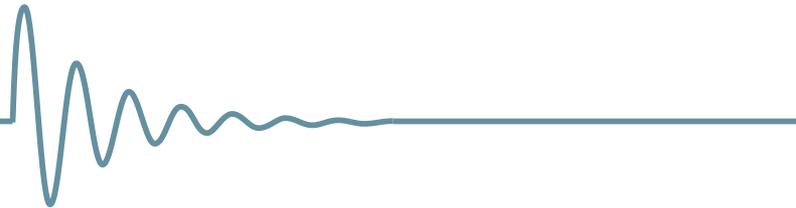
Ecuaciones diferenciales y en diferencia (III)

- Ejemplo 1: Encontrar la respuesta en frecuencia y la respuesta al impulso de un sistema descrito por la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 2x(t)$$

- Ejemplo 2: Encontrar la respuesta al impulso de un sistema causal caracterizado por la siguiente ecuación

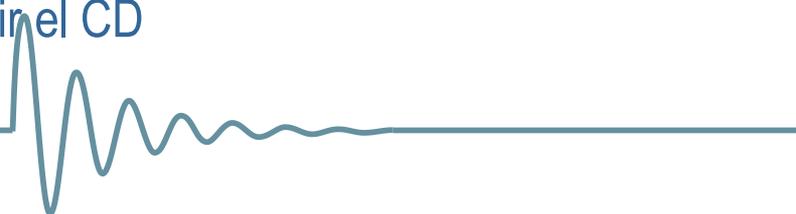
$$y[n] - \frac{3}{4}y[n-1] + \frac{1}{8}y[n-2] = 2x[n]$$



Muestreo y Reconstrucción

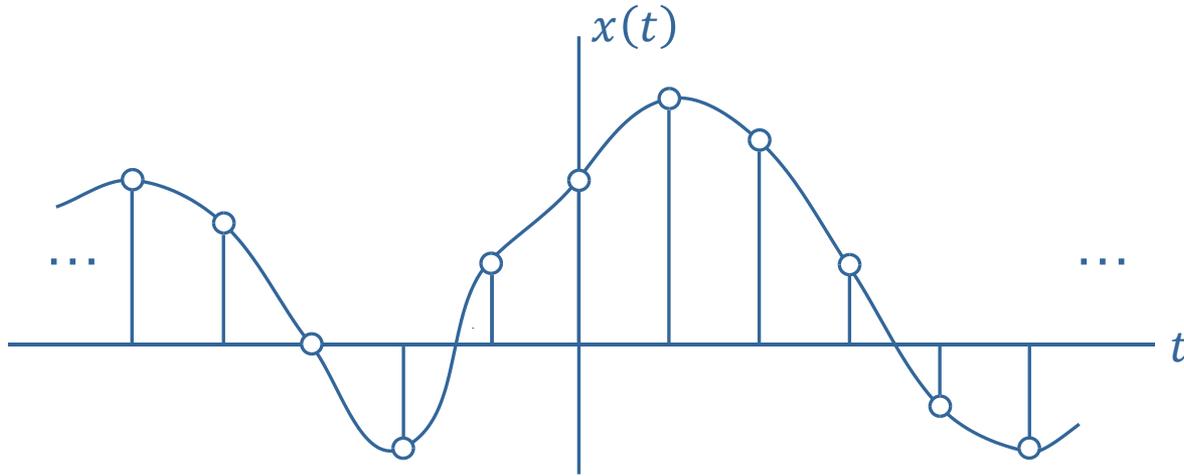
■ Motivación

- La mayor parte de las señales cotidianas son continuas pero se procesan digitalmente
 - Ejemplo: sistema de comunicaciones de voz digitales
 - Conversión analógico–digital para su procesado y transmisión
 - Conversión digital–analógico en el receptor
 - En el proceso analógico–digital se muestrea la señal analógica para su posterior cuantificación y codificación
 - En el receptor el proceso es el recíproco
 - Ejemplo: reproducción de un CD musical
 - Muestreo a velocidad de 44.1 KHz
 - Cuantificación de la señal en 65536 niveles
 - Proceso inverso nos permite reproducir el CD

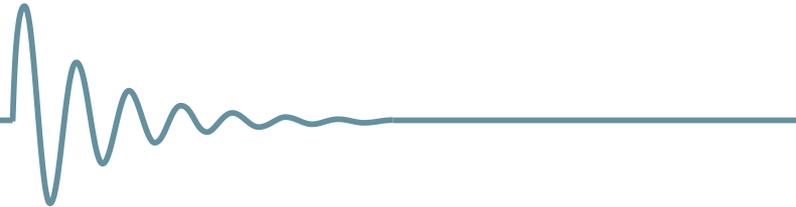


Muestreo (I)

- Problema de muestreo en el dominio del tiempo



- ¿Cómo definimos la señal generada a partir de las muestras?
 - Secuencia discreta : $x[n]$
 - Mediante impulsos: $x_{\delta}(t)$



Muestreo (II)

- Definimos una señal discreta $x[n]$ que es igual a las muestras de $x(t)$ en múltiplos enteros del intervalo de muestreo T_s :

$$x[n] = x(nT_s)$$

- Representación continua de esta señal:

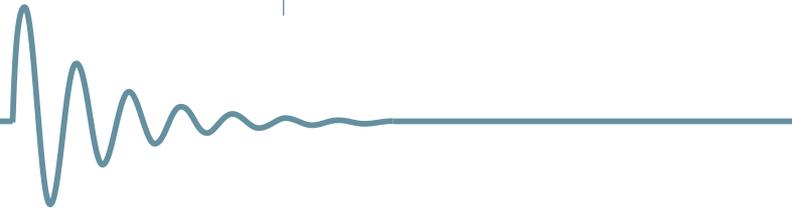
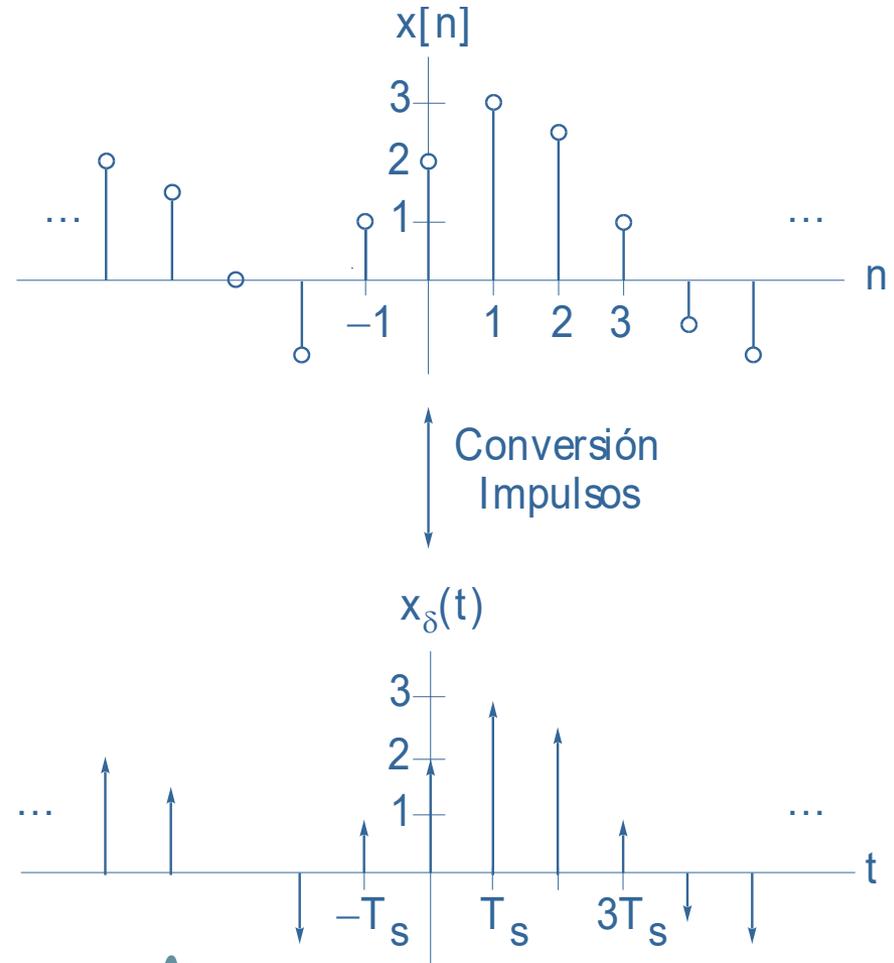
$$x_\delta(t) = \begin{cases} x(t), & t = nT_s \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases}$$

o equivalentemente,

$$x_\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\delta(t - nT_s)$$

Como $x[n] = x(nT_s)$, podemos escribir:

$$x_\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\delta(t - nT_s)$$



Muestreo (III)

- Relación entre la FT y la DTFT de la señal muestreada:
 - La DTFT de una señal discreta viene dada por:

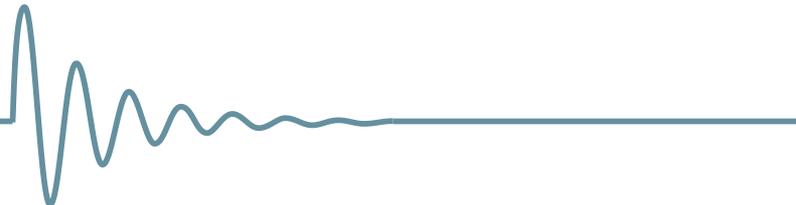
$$x[n] \xleftrightarrow{DTFT} X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n}$$

Buscamos la $X_{\delta}(j\omega)$ de la señal $x_{\delta}(t)$

$$x_{\delta}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\delta(t - nT_s) \xleftrightarrow{FT} X_{\delta}(j\omega)$$

Si recordamos que

$$\begin{aligned} \delta(t) &\xleftrightarrow{FT} 1 \\ \delta(t - nT_s) &\xleftrightarrow{FT} e^{-j\omega T_s n} \end{aligned}$$



Muestreo (IV)

Luego el par transformado

$$x_{\delta}(t) \xleftrightarrow{FT} X_{\delta}(j\omega)$$

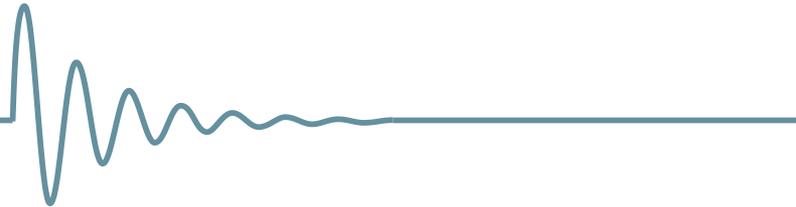
vendrá dado por la siguiente expresión:

$$x_{\delta}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\delta(t - nT_s) \xleftrightarrow{FT} X_{\delta}(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega T_s n}$$

donde podemos ver que

$$X_{\delta}(j\omega) = X(e^{j\Omega}) \Big|_{\Omega=\omega T_s}$$

(*) En la diapositiva siguiente representamos la relación entre la FT y la DTFT de una señal en tiempo discreto



Muestreo (VI)

- Muestreo Ideal:

- Hemos visto que podemos representar la señal muestreada como:

$$x_{\delta}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\delta(t - nT_s)$$

- Sabemos que:

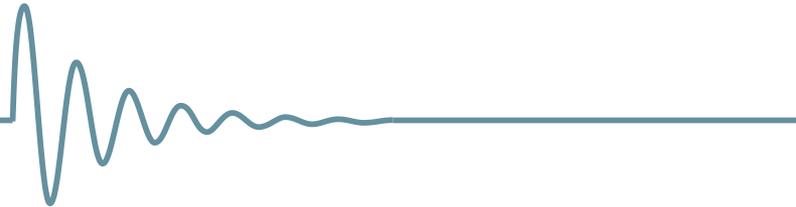
$$x(t)\delta(t - t_0) = x(t_0)\delta(t - t_0)$$

luego podemos escribir $x_{\delta}(t)$ como el producto de dos funciones $x(t)$ y $p(t)$:

$$x_{\delta}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\delta(t - nT_s) = x(t)p(t)$$

siendo:

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)$$

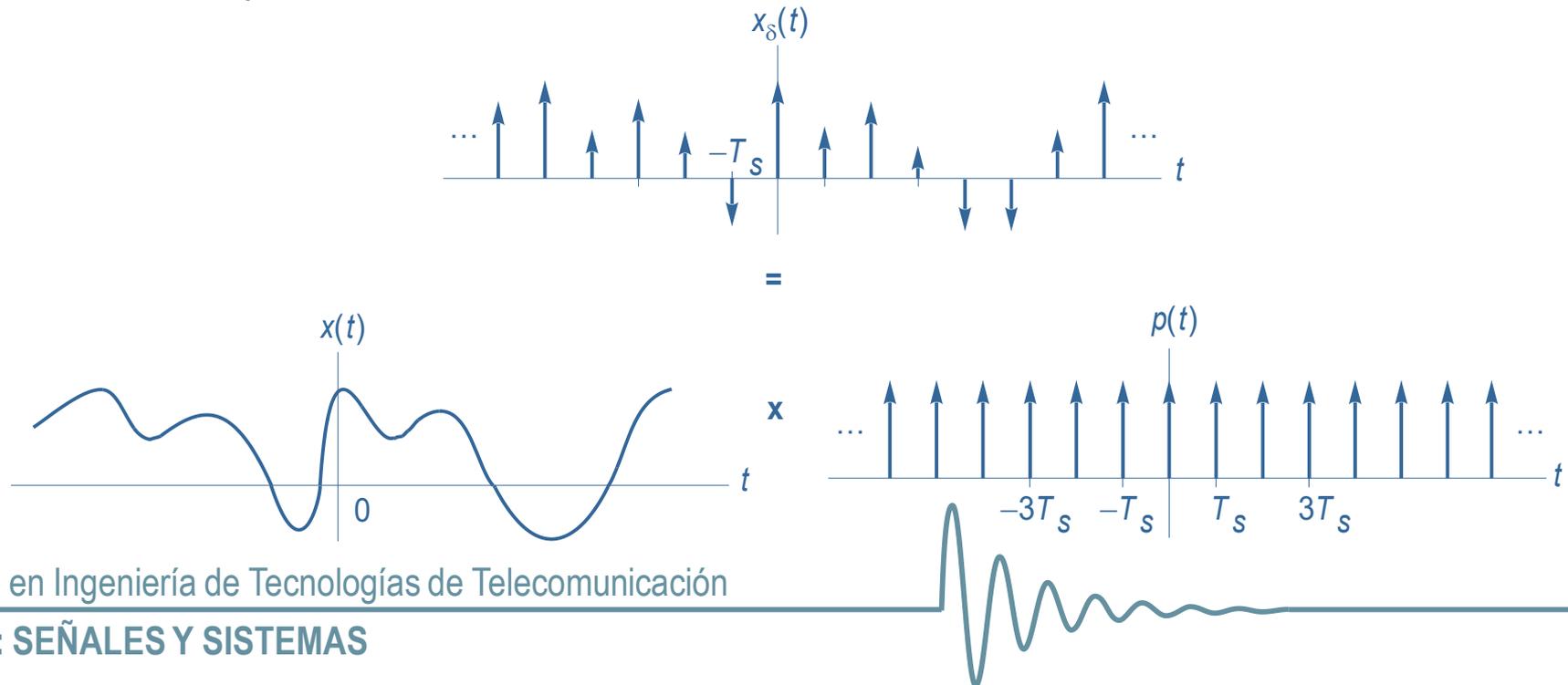


Muestreo (VII)

La ecuación:

$$x_{\delta}(t) = x(t)p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\delta(t - nT_s)$$

se conoce como **muestreo ideal mediante impulsos** e indica que, matemáticamente, podemos representar una señal muestreada como el producto de la señal continua original por un tren de impulsos:



Muestreo (VIII)

- ¿Qué relación existe entre el espectro de la señal continua muestreada y el de la señal $x(t)$ original?

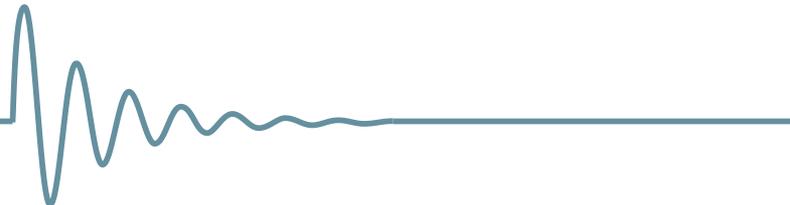
Sabemos que una multiplicación en el dominio del tiempo se corresponde con una convolución en el dominio de la frecuencia:

$$x(t) \cdot y(t) \xleftrightarrow{FT} \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * Y(j\omega)$$

Conocemos la transformada de un tren de impulsos:

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) \xleftrightarrow{FT} P(j\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s)$$

Además sabemos que: $X(j\omega) * \delta(\omega - \omega_0) = X(j\omega - j\omega_0)$

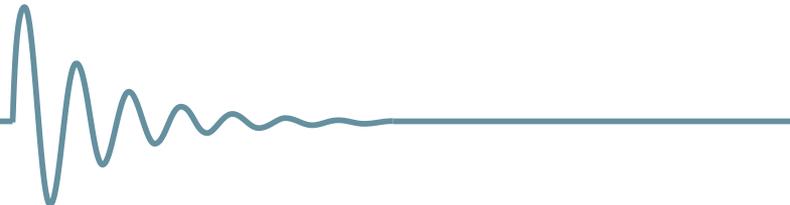


Muestreo (IX)

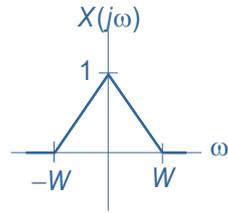
luego:

$$\begin{aligned}x_{\delta}(t) = x(t) \cdot p(t) &\xleftrightarrow{FT} X_{\delta}(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * P(j\omega) = \\ &= \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j\omega - jk\omega_s)\end{aligned}$$

- La FT de una señal muestreada es una suma infinita de versiones desplazadas de la FT de la señal original. Las diferentes versiones están desplazadas múltiplos enteros de ω_s
- Si ω_s no es lo suficientemente grande respecto de la frecuencia máxima del espectro (si está limitado en banda) pueden producirse solapamientos entre las réplicas de $X(j\omega)$
- El solapamiento origina un falseamiento, una distorsión del espectro que se conoce como **ALIASING**

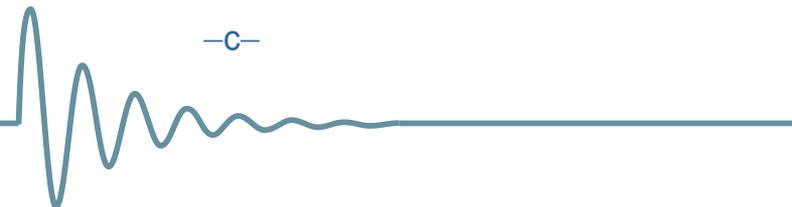
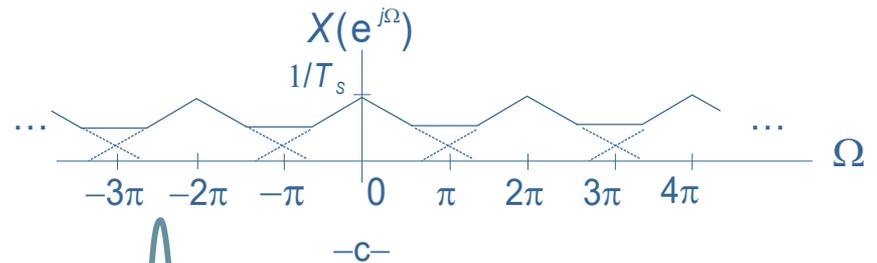
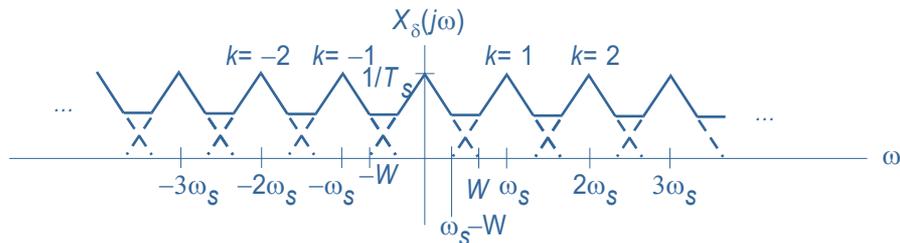
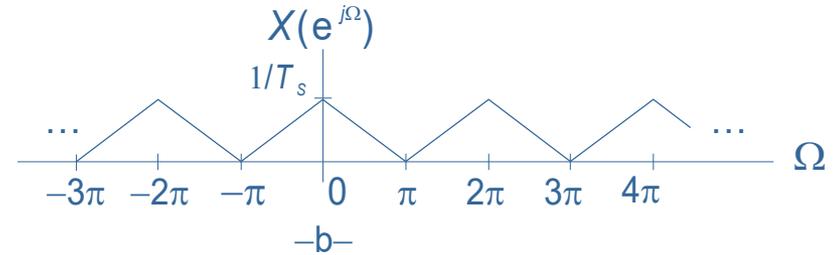
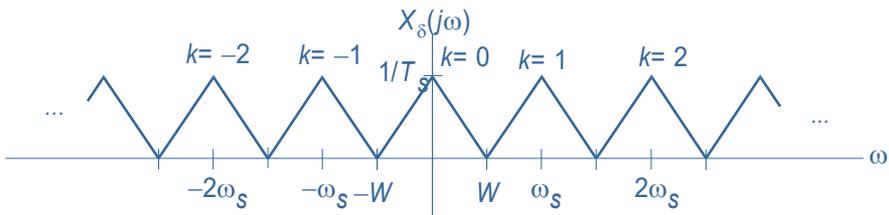
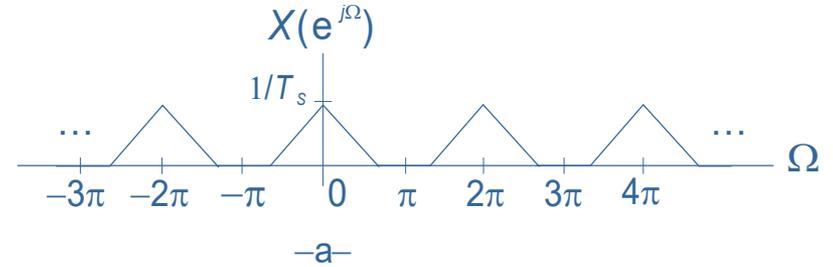
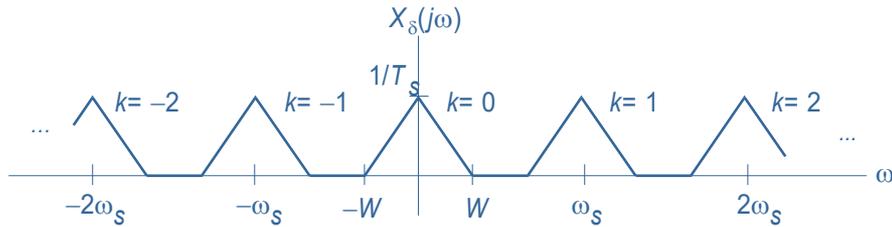


Muestreo (X)



Señal muestreada:

a) $\omega_s = 3W$; b) $\omega_s = 2W$; c) $\omega_s = \frac{3W}{2}$



Muestreo (XI)

- **Ejemplo:** Analizar el efecto de muestrear la señal:

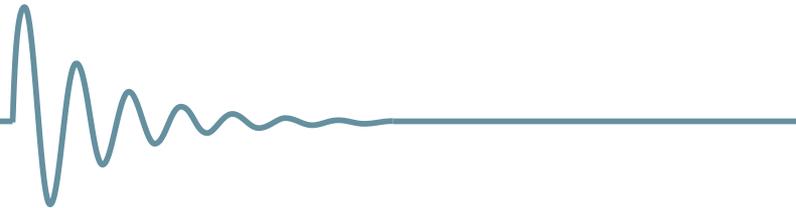
$$x(t) = \cos(\pi t)$$

Determinar la FT de la señal muestreada para los siguientes intervalos:

$$a) T_s = \frac{1}{4}; \quad b) T_s = 1; \quad c) T_s = \frac{3}{2}$$

Solución. – Sabemos que

$$X_\delta(j\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j\omega - jk\omega_s)$$



Muestreo (XII)

- Calculamos la transformada de la señal $x(t) = \cos(\omega_0 t)$:

$$x(t) = \cos(\omega_0 t) \xleftrightarrow{FT} \pi \delta(\omega + \omega_0) + \pi \delta(\omega - \omega_0)$$

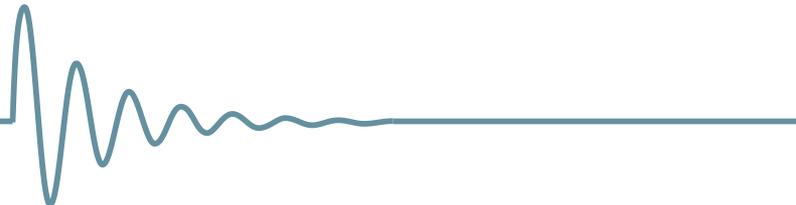
Como $\omega_0 = \pi$,

$$x(t) = \cos(\pi t) \xleftrightarrow{FT} \pi \delta(\omega + \pi) + \pi \delta(\omega - \pi)$$

tenemos

$$X_\delta(j\omega) = \frac{\pi}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\delta(\omega + \pi - k\omega_s) + \delta(\omega - \pi - k\omega_s)]$$

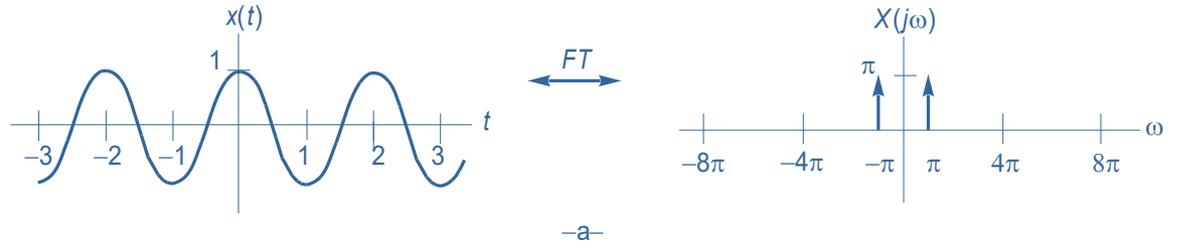
es decir, tendremos pares de impulsos separados un factor 2π y centrados en múltiplos enteros de la frecuencia de muestreo $\omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$



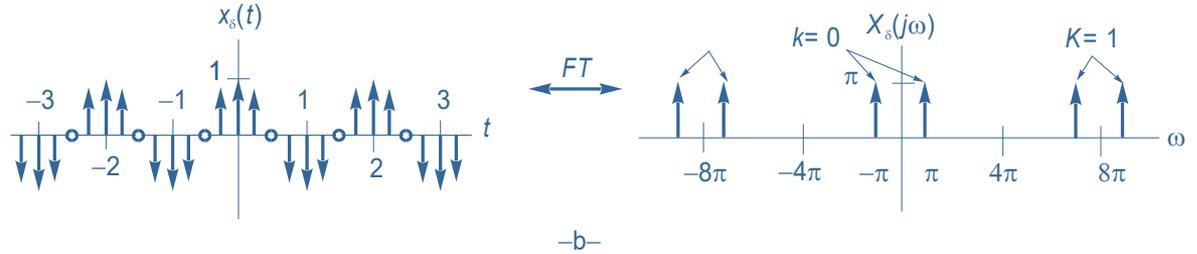
Muestreo (XIII)

Señal muestreada y espectro

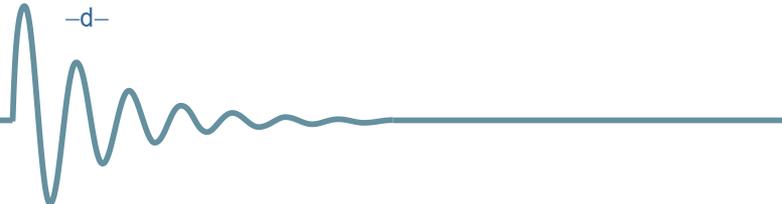
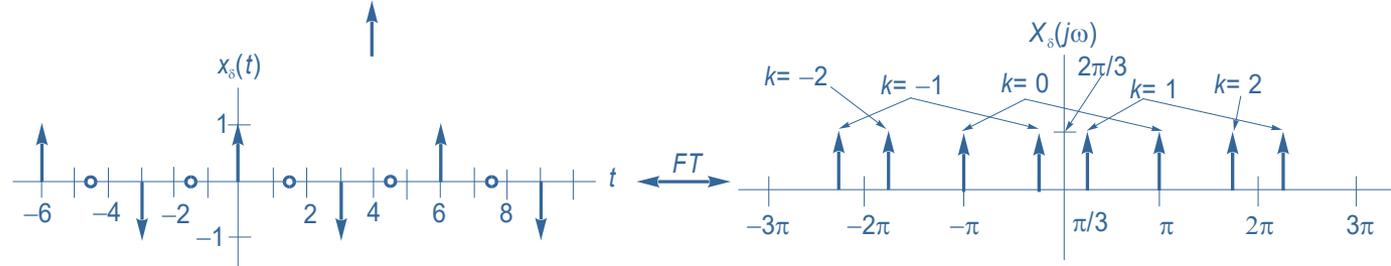
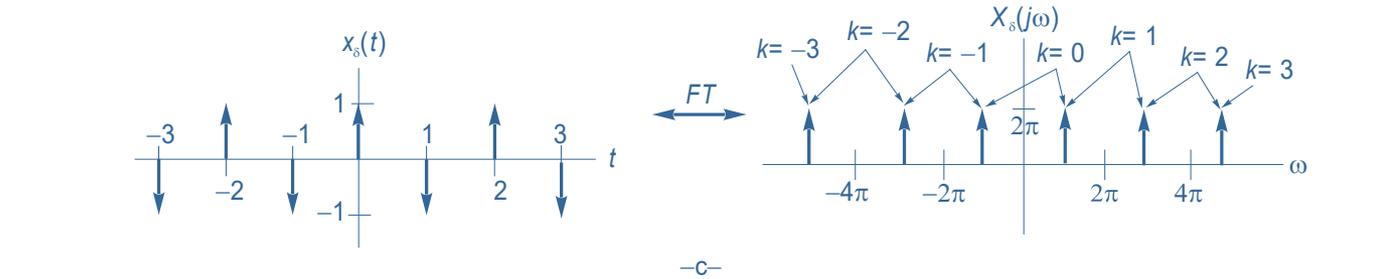
a) $T_s = \frac{1}{4}; \omega_s = 8\pi$



b) $T_s = 1; \omega_s = 2\pi$



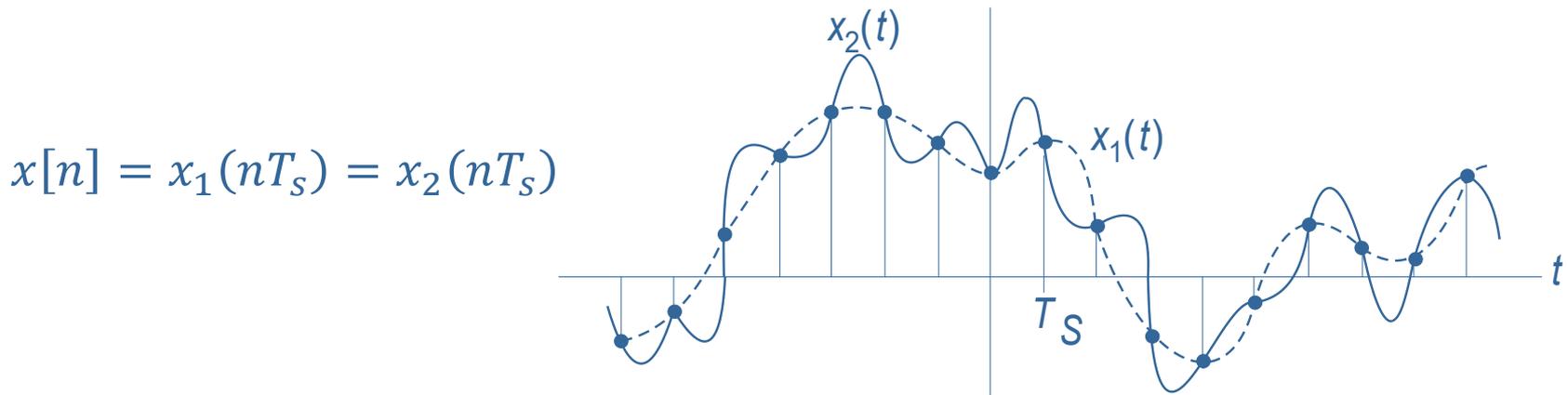
c) $T_s = \frac{3}{2}; \omega_s = \frac{4\pi}{3}$



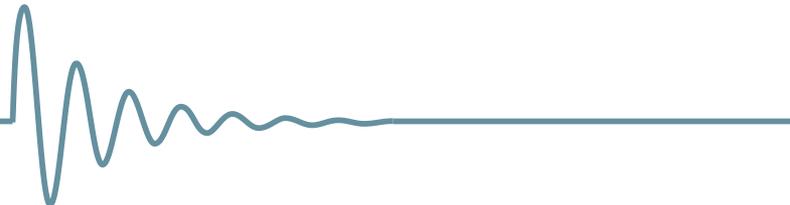
Reconstrucción (I)

- ¿Cómo recuperar la señal original?

Las muestras no siempre determinan de forma única la señal continua en el tiempo, no nos indican el comportamiento entre los tiempos de muestreo



- Establecer condiciones que permitan reconstruir la señal de forma única
- Método de reconstrucción



Reconstrucción (II)

- **Teorema de Muestreo:** Considerar que el par transformado

$$x(t) \xleftrightarrow{FT} X(j\omega)$$

representa una señal limitada en banda y por tanto

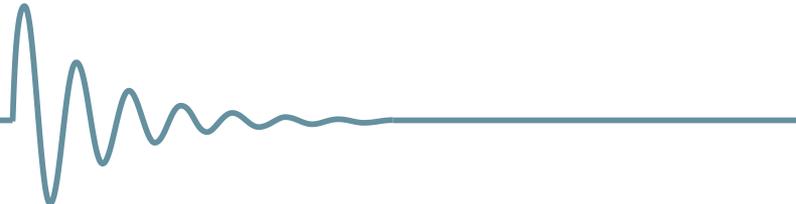
$$X(j\omega) = 0 \text{ para } |\omega| > \omega_m$$

La señal $x(t)$ se puede reconstruir a partir de sus muestras ($x(nT_s)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) si:

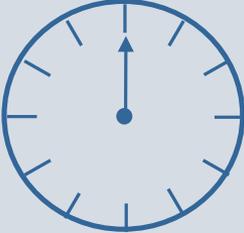
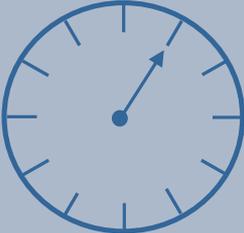
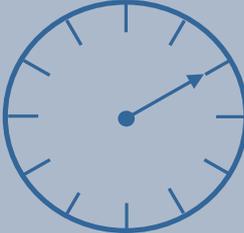
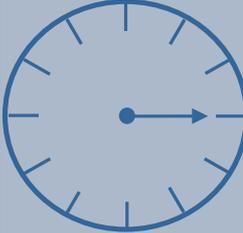
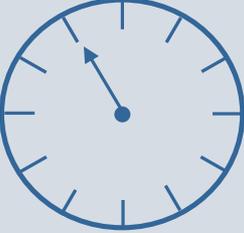
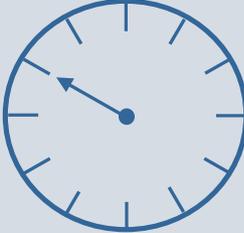
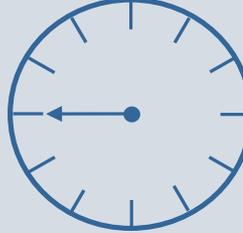
$$\omega_s > 2\omega_m$$

$$* f_s > 2f_m, \text{ donde } f_s = \frac{1}{T_s} \text{ o } T_s < \frac{1}{2f_m}$$

- $\omega_s = 2\pi/T_s$: frecuencia de muestreo o frecuencia de Nyquist
- $2\omega_m$: velocidad de muestreo de Nyquist (frecuencia de muestreo mínima)



Reconstrucción (III)

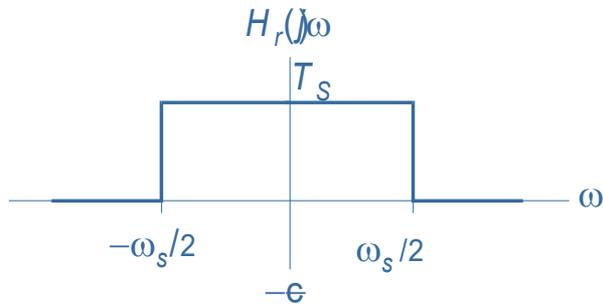
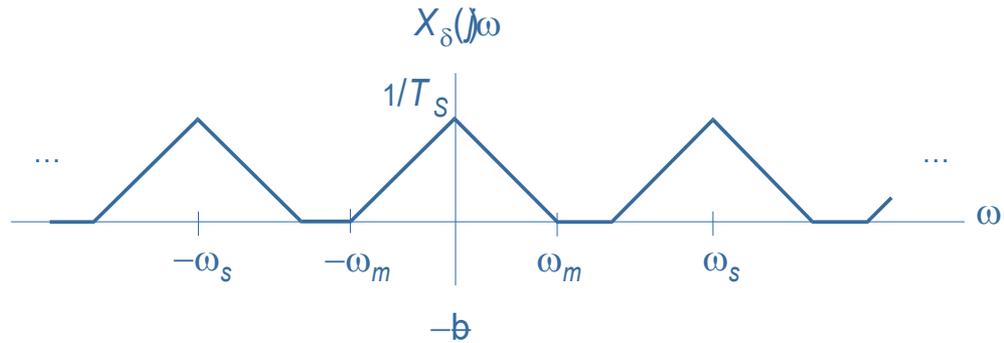
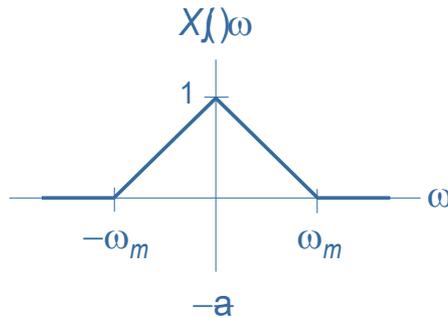
	$\omega_s > 2\omega_{m\acute{a}x}$ $f_s > 2f_{m\acute{a}x}$			
$T = 60 \text{ min.}$ $f = \frac{1}{60} = 0,0166$ $2f = 0,033$				
$T_s = 5 \text{ min.}$ $f_s = \frac{1}{5} = 0,2$ $f_s = 0,2 > 2f = 0,033$				   
$T_s = 55 \text{ min.}$ $f_s = \frac{1}{55} = 0,0188$ $f_s = 0,0188 \neq 2f = 0,033$				   



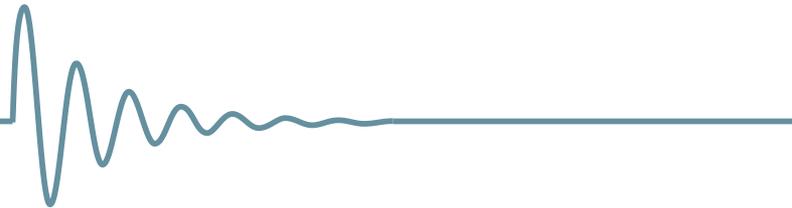
Reconstrucción (IV)

- Reconstrucción ideal

$$X(j\omega) = X_\delta(j\omega)H_r(j\omega)$$



$$H_r(j\omega) = \begin{cases} T_s, & |\omega| < \frac{\omega_s}{2} \\ 0, & |\omega| > \frac{\omega_s}{2} \end{cases}$$



Reconstrucción (V)

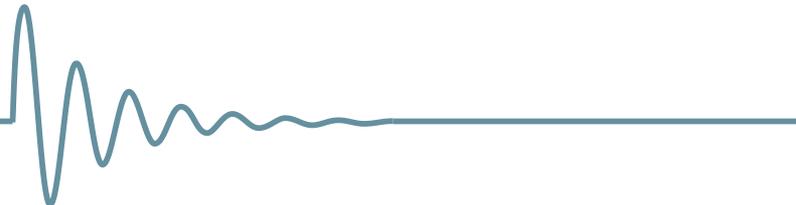
- Reconstrucción ideal: ¿Qué significa desde el punto de vista del dominio del tiempo?

$$X(j\omega) = X_\delta(j\omega)H_r(j\omega) \quad \Rightarrow \quad x(t) = x_\delta(t) * h_r(t)$$

$$x(t) = h_r(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\delta(t - nT_s)$$

Sabemos que

$$h_r(t) = \frac{T_s \sin\left(\frac{\omega_s t}{2}\right)}{\pi t} \xleftrightarrow{FT} H_r(j\omega) = \begin{cases} T_s, & |\omega| \leq \omega_s/2 \\ 0, & |\omega| > \omega_s/2 \end{cases}$$

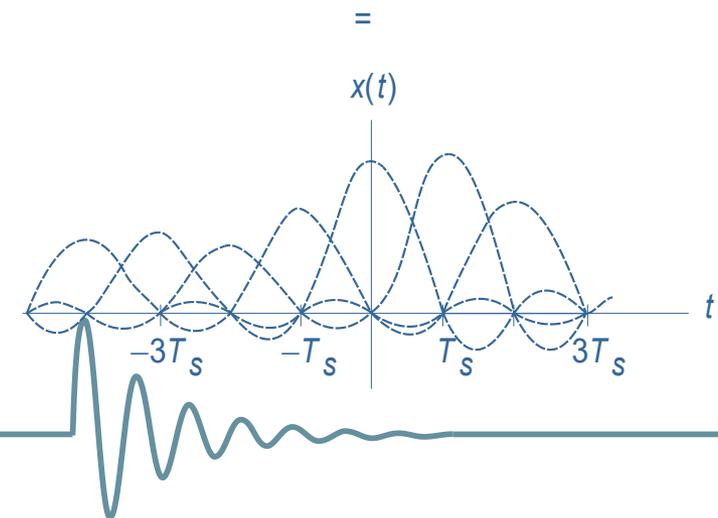
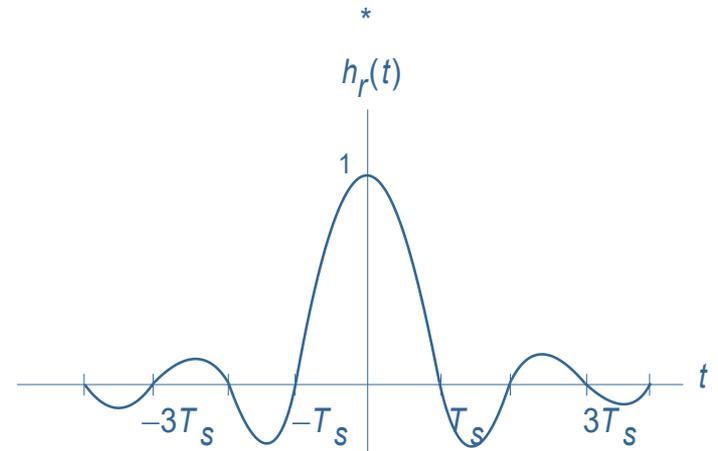
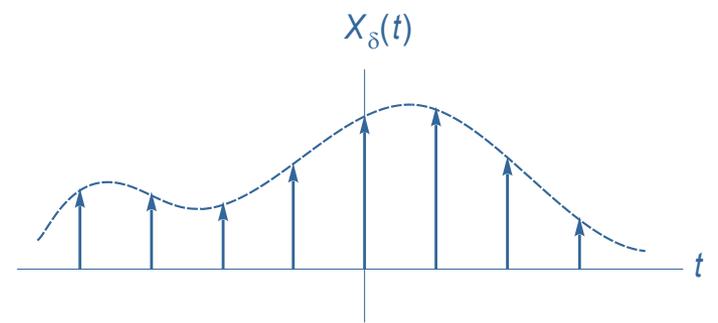


Reconstrucción (VI)

$$x(t) = h_r(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\delta(t - T_s)$$

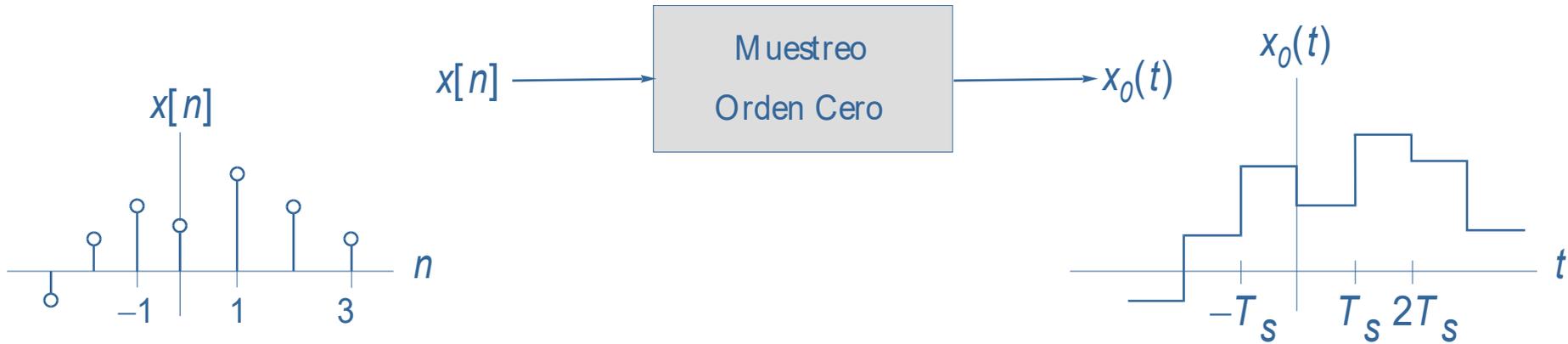
$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega_s}{2\pi}(t - nT_s)\right)$$

- Interpolación ideal limitada en banda
 - Sistema no causal
 - La influencia de cada muestra se extiende a un intervalo infinito de tiempo

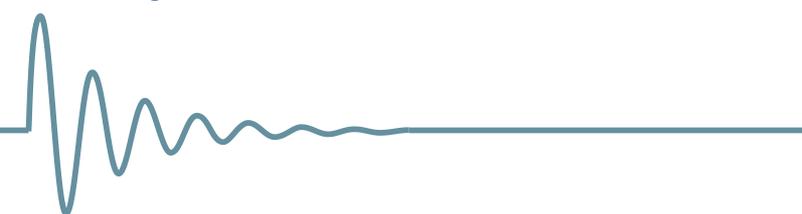
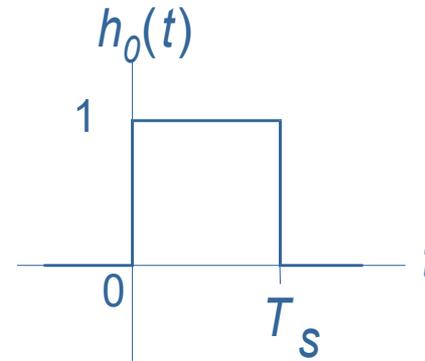


Reconstrucción (VII)

- Reconstrucción práctica – Muestreo de orden cero



$$h_0(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < T_s \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases}$$



Reconstrucción (VIII)

- Analizamos mediante la FT la bondad de la aproximación

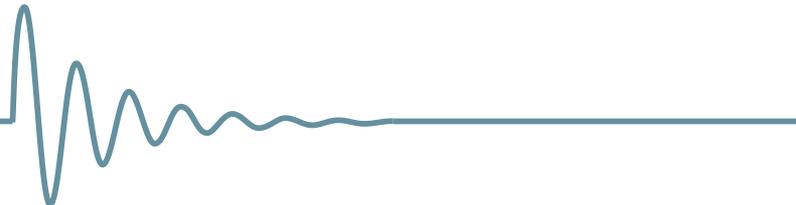
$$x_o(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]h_0(t - nT_s) = h_0(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\delta(t - nT_s)$$

Por la propiedad de convolución:

$$X_o(j\omega) = X_\delta(j\omega)H_0(j\omega)$$

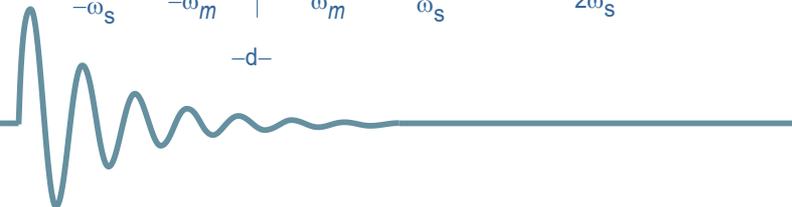
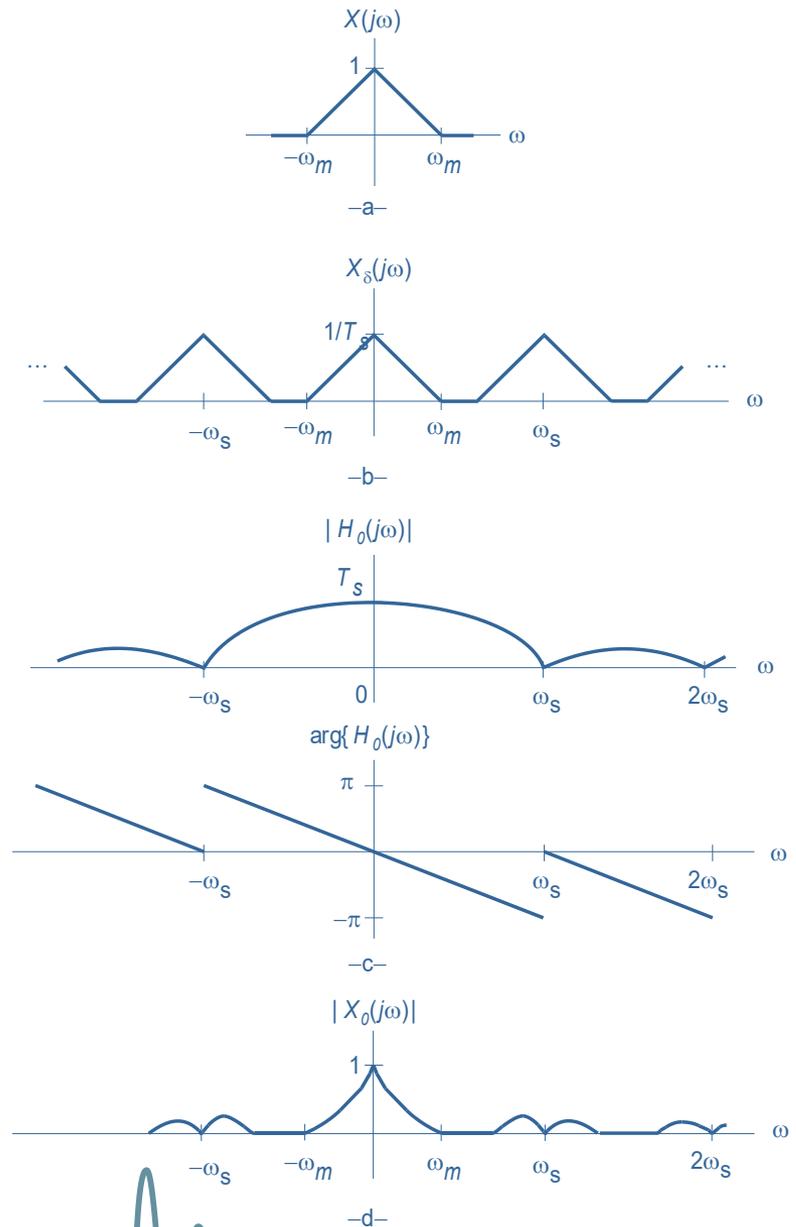
donde:

$$H_0(j\omega) = 2e^{-j\omega T_s/2} \frac{\sin\left(\omega \frac{T_s}{2}\right)}{\omega}$$



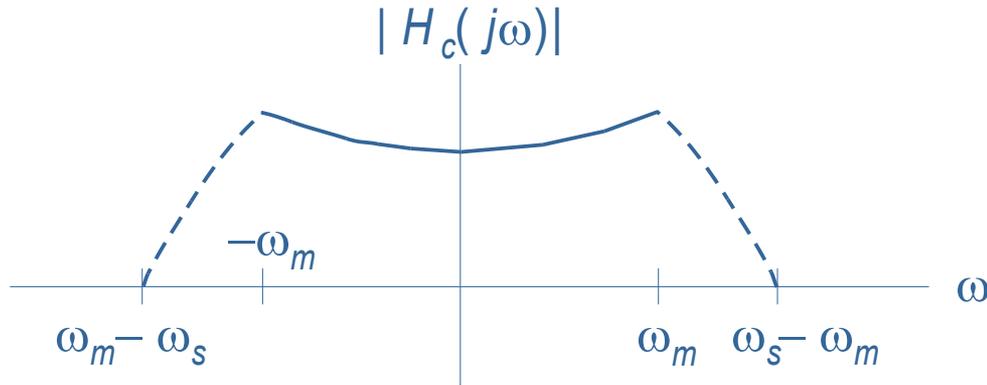
Reconstrucción (IX)

- Modificaciones introducidas por el sistema
 - Desplazamiento lineal en fase debido al retraso de $T_S/2$
 - Distorsión del espectro entre $-\omega_m$ y ω_m
 - Réplicas distorsionadas y atenuadas del espectro

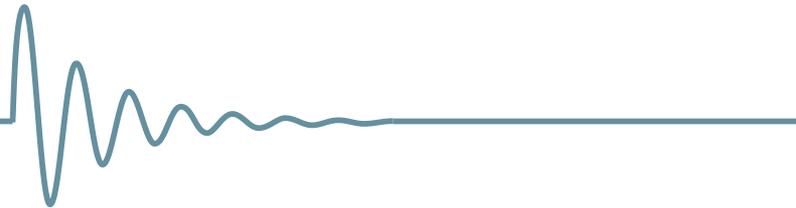


Reconstrucción (X)

- Filtro de compensación o anti-imagen

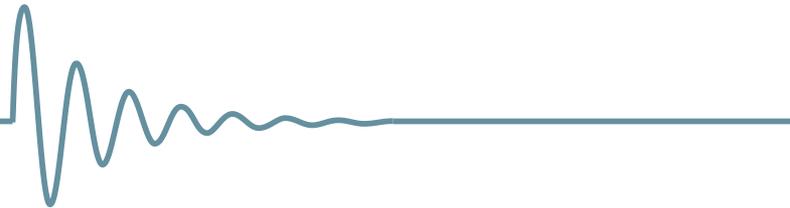
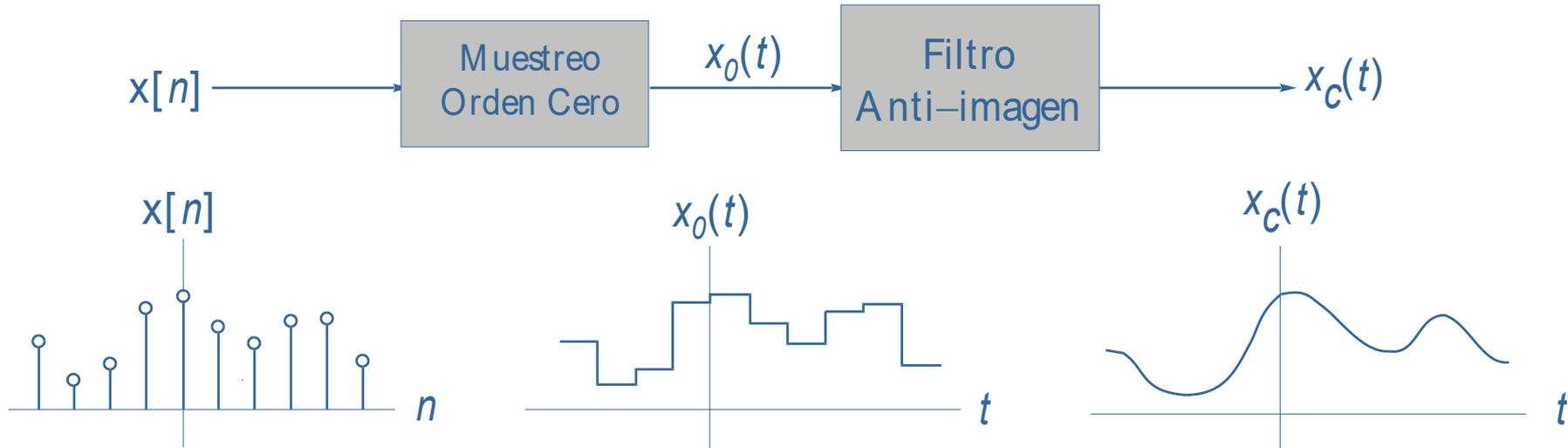


$$H_c(j\omega) = \begin{cases} \frac{\omega T_s}{2 \sin(\omega T_s/2)}, & |\omega| \leq \omega_m \\ 0, & |\omega| > \omega_s - \omega_m \end{cases}$$



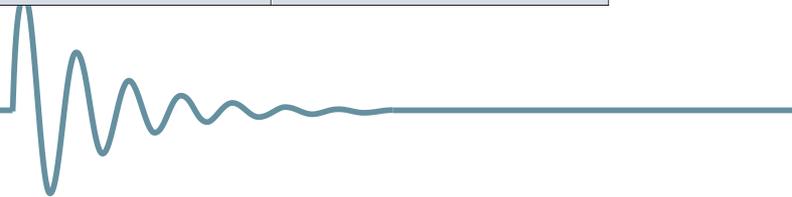
Reconstrucción (XI)

- Filtro de compensación o anti-imagen



Representaciones de Fourier

DOMINIO DEL TIEMPO	SEÑAL PERIÓDICA	SEÑAL APERIÓDICA	
SEÑAL CONTINUA	<p style="text-align: center;">Series de Fourier</p> $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k] e^{jk\omega_0 t}$ $X[k] = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$ <p style="text-align: center;">$x(t)$ tiene periodo T; $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$</p>	<p style="text-align: center;">Transformada de Fourier (FT)</p> $x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$ $X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$	SEÑAL APERIÓDICA
SEÑAL DISCRETA	<p style="text-align: center;">Series de Fourier (DTFS)</p> $x[n] = \sum_{k \in \mathbb{N}} X[k] e^{jk\Omega_0 n}$ $X[k] = \frac{1}{N} \sum_{n \in \mathbb{N}} x[n] e^{-jk\Omega_0 n}$ <p style="text-align: center;">$x[n]$ y $X[k]$ tienen periodo N; $\Omega_0 = \frac{2\pi}{N}$</p>	<p style="text-align: center;">Transformada de Fourier (DTFT)</p> $x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\Omega}) e^{j\Omega n} d\Omega$ $X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n}$ <p style="text-align: center;">$X(e^{j\Omega})$ tiene periodo 2π</p>	SEÑAL PERIÓDICA
	SEÑAL DISCRETA	SEÑAL CONTINUA	DOMINIO DE LA FRECUENCIA



Propiedades de la Representación de Fourier

PROPIEDADES DE LA REPRESENTACIÓN DE FOURIER

PROPIEDAD	Transformada de Fourier (FT)	Serie de Fourier (FS)	Transformada de Fourier (DTFT)	Serie de Fourier (DTFS)
	$x(t) \xrightarrow{FT} X(j\omega)$ $y(t) \xrightarrow{FT} Y(j\omega)$	$x(t) \xrightarrow{FS;\omega_0} X[k]$ $y(t) \xrightarrow{FS;\omega_0} Y[k]$ $x(t)$ periodo T	$x[n] \xrightarrow{DTFT} X(e^{j\Omega})$ $y[n] \xrightarrow{DTFT} Y(e^{j\Omega})$ $X(e^{j\Omega})$ periodo 2π	$x[n] \xrightarrow{DTFS;\Omega_0} X[k]$ $y[n] \xrightarrow{DTFS;\Omega_0} Y[k]$ $x[n], X[k]$ periodo N
Linealidad	$ax(t) + by(t) \xrightarrow{FT} aX(j\omega) + bY(j\omega)$	$ax(t) + by(t) \xrightarrow{FS;\omega_0} aX[k] + bY[k]$	$ax[n] + by[n] \xrightarrow{DTFT} aX(e^{j\Omega}) + bY(e^{j\Omega})$	$ax[n] + by[n] \xrightarrow{DTFS;\Omega_0} aX[k] + bY[k]$
Desplazamiento tiempo	$x(t - t_0) \xrightarrow{FT} e^{-j\omega t_0} X(j\omega)$	$x(t - t_0) \xrightarrow{FS;\omega_0} e^{-jk\omega_0 t_0} X[k]$	$x[n - n_0] \xrightarrow{DTFT} e^{-j\Omega n_0} X(e^{j\Omega})$	$x[n - n_0] \xrightarrow{DTFS;\Omega_0} e^{-jk\Omega_0 n_0} X[k]$
Desplazamiento frecuencia	$e^{j\gamma t} x(t) \xrightarrow{FT} X(j(\omega - \gamma))$	$e^{jk_0 \omega_0 t} x(t) \xrightarrow{FS;\omega_0} X[k - k_0]$	$e^{j\Omega_0 n} x[n] \xrightarrow{DTFT} X(e^{j(\Omega - \Omega_0)})$	$e^{jk_0 \Omega_0 n} x[n] \xrightarrow{DTFS;\Omega_0} X[k - k_0]$
Escalado	$x(at) \xrightarrow{FT} \frac{1}{ a } X\left(\frac{j\omega}{a}\right)$	$x(at) \xrightarrow{FS;\omega_0} X[k]$	$x_z[n] = 0, n \neq lp$ $x_z[lpn] \xrightarrow{DTFT} X_z(e^{j\Omega/p})$	$x_z[n] = 0, n \neq lp$ $x_z[lpn] \xrightarrow{DTFS;\Omega_0} pX_z[k]$
Derivación en el tiempo	$\frac{d}{dt} x(t) \xrightarrow{FT} j\omega X(j\omega)$	$\frac{d}{dt} x(t) \xrightarrow{FS;\omega_0} jk\omega_0 X[k]$	—————	—————
Derivación en la frecuencia	$-jtx(t) \xrightarrow{FT} \frac{d}{d\omega} X(j\omega)$	—————	$-jnx[n] \xrightarrow{DTFT} \frac{d}{d\Omega} X(e^{j\Omega})$	—————
Integración/Sumatorio	$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \xrightarrow{FT} \frac{X(j\omega)}{j\omega} + \pi X(j0)\delta(\omega)$	—————	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \xrightarrow{DTFT} \frac{X(e^{j\Omega})}{1 - e^{-j\Omega}} + \pi X(e^{j0}) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k2\pi)$	—————
Convolución	$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t - \tau) d\tau \xrightarrow{FT} X(j\omega)Y(j\omega)$	$\int_{(T)} x(\tau)y(t - \tau) d\tau \xrightarrow{FS;\omega_0} TX[k]Y[k]$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]y[n - k] \xrightarrow{DTFT} X(e^{j\Omega})Y(e^{j\Omega})$	$\sum_{k=(N)} x[k]y[n - k] \xrightarrow{DTFS;\Omega_0} NX[k]Y[k]$
Multiplicación	$x(t)y(t) \xrightarrow{FT} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\nu)Y(j(\omega - \nu)) d\nu$	$x(t)y(t) \xrightarrow{FS;\omega_0} \sum_{l=-\infty}^{\infty} X[l]Y[k - l]$	$x[n]y[n] \xrightarrow{DTFT} \frac{1}{2\pi} \int_{(2\pi)} X(e^{j\Gamma})Y(e^{j(\Omega - \Gamma)}) d\Gamma$	$x[n]y[n] \xrightarrow{DTFS;\Omega_0} \sum_{l=(N)} X[l]Y[k - l]$
Teorema de Parseval	$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) ^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) ^2 d\omega$	$\frac{1}{T} \int_{(T)} x(t) ^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k] ^2$	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] ^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{(2\pi)} X(e^{j\Omega}) ^2 d\Omega$	$\frac{1}{N} \sum_{n=(N)} x[n] ^2 = \sum_{k=(N)} X[k] ^2$
Dualidad	$X(jt) \xrightarrow{FT} 2\pi x(-\omega)$	$x[n] \xrightarrow{DTFT} X(e^{j\Omega})$ $X(e^{j\Omega}) \xrightarrow{FS;1} x[-k]$	$x[n] \xrightarrow{DTFT} X(e^{j\Omega})$ $X(e^{j\Omega}) \xrightarrow{FS;1} x[-k]$	$X[n] \xrightarrow{DTFS;\Omega_0} \frac{1}{N} x[-k]$
Simetría	$x(t)$ real $\xrightarrow{FT} X^*(j\omega) = X(-j\omega)$ $x(t)$ imaginaria $\xrightarrow{FT} X^*(j\omega) = -X(-j\omega)$ $x(t)$ real y par $\xrightarrow{FT} \text{Im}\{X(j\omega)\} = 0$ $x(t)$ real e impar $\xrightarrow{FT} \text{Re}\{X(j\omega)\} = 0$	$x(t)$ real $\xrightarrow{FS;\omega_0} X^*[k] = X[-k]$ $x(t)$ imaginaria $\xrightarrow{FS;\omega_0} X^*[k] = -X[-k]$ $x(t)$ real y par $\xrightarrow{FS;\omega_0} \text{Im}\{X[k]\} = 0$ $x(t)$ real e impar $\xrightarrow{FS;\omega_0} \text{Re}\{X[k]\} = 0$	$x[n]$ real $\xrightarrow{DTFT} X^*(e^{j\Omega}) = X(e^{-j\Omega})$ $x[n]$ imaginaria $\xrightarrow{DTFT} X^*(e^{j\Omega}) = -X(e^{-j\Omega})$ $x[n]$ real y par $\xrightarrow{DTFT} \text{Im}\{X(e^{j\Omega})\} = 0$ $x[n]$ real e impar $\xrightarrow{DTFT} \text{Re}\{X(e^{j\Omega})\} = 0$	$x[n]$ real $\xrightarrow{DTFS;\Omega_0} X^*[k] = X[-k]$ $x[n]$ imaginaria $\xrightarrow{DTFS;\Omega_0} X^*[k] = -X[-k]$ $x[n]$ real y par $\xrightarrow{DTFS;\Omega_0} \text{Im}\{X[k]\} = 0$ $x[n]$ real e impar $\xrightarrow{DTFS;\Omega_0} \text{Re}\{X[k]\} = 0$

